［研究ノート］

次元の考え方をもとにした図形概念を育てる数学教育
−オイラーの多面体定理の発展１−

田中　俊光

山陽小野田市立山口東京理科大学　共通教育センター

Mathematics Education That Nurtures Geometric Concepts Based on The Concept of Dimensions – Development of Euler's Polyhedron Theorem 1 –

Toshimitsu TANAKA

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

要　約

３次元の図形「多面体」の点の数をＴ、辺の数をＨ、面の数をＭと表すと、Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝２が成り立つ。これがオイラーの多面体定理である。この定理は、多面体のＴ、Ｈ、Ｍを数えることで比較的容易に見つけることができる。２次元の図形「多角形」では、Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝１が成り立つ。これをオイラーの多角形定理と呼ぼう。多角形のＴ、Ｈ、Ｍの関係については、図形が単純すぎてＴ＝Ｈ、Ｍ＝１に目をうばわれ、Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝１を見つけるのが難しい。そこで、図形を多少複雑にするために「仕切り線」を入れてＴ＝Ｈ、Ｍ＝１を意図的にくずすことで見つけることができる。ここで、２次元のオイラーの多角形定理Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝１と３次元のオイラーの多面体定理Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝２を比較すると、４次元の図形「多胞体」ではＴ−Ｈ＋Ｍ＝３になりそうだと予測できる。

ところが、２次元の図形「多角形」に「仕切り線」を入れたように、３次元の図形「多面体」に「仕切り面」を入れてＴ、Ｈ、Ｍを数えると、Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝２が成り立たなくなる。真のオイラーの多面体定理は、胞の数をHoとしてＴ−Ｈ＋Ｍ−Ho＝1なのである。

ここで再び、２次元のオイラーの多角形定理Ｔ−Ｈ＋Ｍ＝1と３次元のオイラーの多面体定理Ｔ−Ｈ＋Ｍ−Ho＝1を比較すると、４次元の図形「多胞体」では、胞で囲まれた４次元の小部屋の数を？と表すとＴ−Ｈ＋Ｍ−Ho＋？＝1になりそうだと予測できる。図形の構成要素を次元の順に並べているので、＋と−が交互に出てきて、次元が1つ上がるたびに左辺の項が1つずつ増えているのである。

本稿では、研究仮説を「生徒の思考に沿った授業づくりレベルで各次元のオイラーの図形定理を考察することで、次元を超えた図形概念を育てるための手だてを一般化できる」とする。中学２年の授業「次元を超えるー図形の点・辺・面…の数ー」（２時間計画）をつくる過程をもとに、「３次元のオイラーの多面体定理を見つける」→「『仕切り線』を入れて２次元のオイラーの多角形定理を見つける」→「『仕切り面』を入れて考察し、３次元のオイラーの多面体定理を修正する」→「４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測する」という授業の流れと、「次元の順に整理する」「比較しやすいように学習プリントを工夫する」の２つをベースに「２次元の図形と３次元の図形で同様のことを行わせる」→「規則をもとに４次元・５次元の図形をイメージさせる」→「一度次元を下げてデータを増やす」という手だてについて述べていく。

キーワード：数学教育、次元、オイラーの多面体定理、仕切り線、仕切り面

KEY WORDS:mathematics education, dimension, Euler's polyhedron theorem, partition line, partition surface

1　はじめに

３次元の図形「多面体」の点の数をＴ、辺の数をＨ、面の数をＭと表すと、Ｔ－Ｈ＋Ｍ＝２が成り立つ。これがオイラーの多面体定理である。一般的には、点の数をｖ、辺の数をｅ、面の数をｆと表すが、ローマ字表記の頭文字を使う方が生徒にとって分かりやすい。２次元の図形「多角形」では、Ｔ－Ｈ＋Ｍ＝１が成り立つ。これをオイラーの多角形定理と呼ぼう。

２次元のオイラーの多角形定理Ｔ－Ｈ＋Ｍ＝１と３次元のオイラーの多面体定理Ｔ－Ｈ＋Ｍ＝２を比較すると、４次元の図形ではＴ－Ｈ＋Ｍ＝３になりそうだと予測できる。

この予測が正しいのか、そうではないのかを追究するのが、授業「次元を超えるー図形の点･辺･面…の数ー」である。

本稿では、研究仮説を「生徒の思考に沿った授業づくりレベルで各次元のオイラーの図形定理を考察することで、次元を超えた図形概念を育てるための手だてを一般化できる」として、授業「次元を超えるー図形の点・辺・面…の数ー」をつくる過程をもとに述べていく。

「オイラーの図形定理」は、「オイラーの多角形定理」「オイラーの多面体定理」などをまとめた、全次元で通用する用語として用いる。

平成29年告示中学校学習指導要領解説 数学編[1)]の第２学年の内容Ｂ図形では、数学的な推論「帰納、類推、演繹」を本格的に扱う。授業「次元を超えるー図形の点・辺・面…の数ー」は、「帰納、類推」のまとめとして中学２年図形領域に２時間計画で位置づけた。これまで実践してきた研究[2)]を再構成したものであり、中学１年の授業「次元を超えるー単純図形と計量図形ー」[3)]の次の段階の授業である。

2　3次元のオイラーの多面体定理

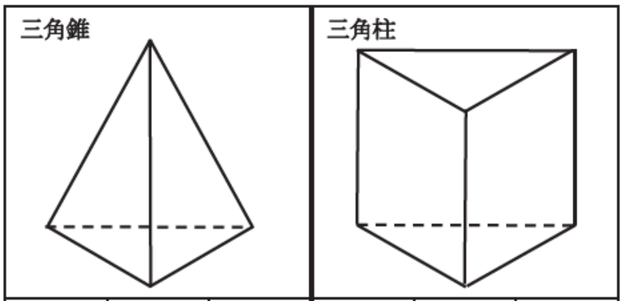
(1)　オイラーの多面体定理を見つける

オイラーの多面体定理は、多面体のＴ、Ｈ、Ｍを数えることで、比較的容易に見つけることができる。したがって、２次元の図形「多角形」よりも先に、３次元の図形「多面体」を扱う。授業では「三角錐、四角錐、三角柱、四角柱」の４つで取り組ませる。

図1は、三角錐と三角柱の点･辺･面の数を数えて記入したものである。

Ｔ・Ｈ・Ｍに成り立つ関係を見つけるとき、生徒は「小さい２つの数を足して、一番大きい数と比べる」という方法をとるであろう。例えば三角柱の場合は、小さい２つの数「５と６」を足して「５＋６＝11」、この11と一番大きい数「９」を比べて、「差が２」というように考えるのである。

このようにして、Ｍ＋Ｔ－Ｈ＝２または、Ｍ＋Ｔ＝Ｈ＋２という関係式を見つける。



T	H	M	T	H	M
4	6	4	6	9	5

図1　多面体の点･辺･面の数

(2)　図形の構成要素を次元の順に並べる

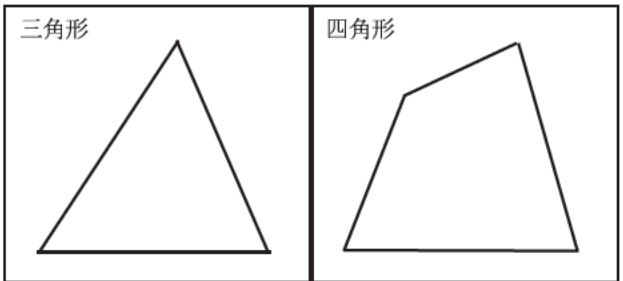
図1は、０次元の構成要素「点」、1次元の構成要素「辺」、2次元の構成要素「面」というように、次元の順に並べている。

後に「４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測する」ことを見越して、関係式も構成要素を次元の順に並べ替えておいた方がよい。関係式はＴ－Ｈ＋Ｍ＝２の一通りになる。

3　2次元のオイラーの多角形定理

(1)　オイラーの多角形定理を見つける

図２は、三角形と四角形の点･辺･面の数を数えて記入したものである。



T	H	M	T	H	M
3	3	1	4	4	1

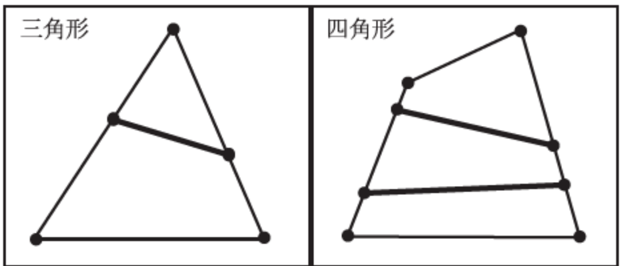
図2　多角形の点･辺･面の数

生徒の思考は、Ｔ＝Ｈ、Ｍ＝1という単純な関係に目をうばわれ、Ｔ－Ｈ＋Ｍ＝1というより複雑な関係式を見つけようという方向に進まないであろう。先ほど、３次元の図形「多面体」でＴ－Ｈ＋Ｍ＝２という関係式を見つけたばかり

だが、それと対応して考えようという気持ちは、この時点ではほとんど起きないであろう。

そこで、図形を多少複雑にするために「仕切り線」を入れて、T＝H、M＝1を意図的にくずして取り組ませる。授業では「三角形に仕切り線1本」「四角形に仕切り線２本（交わらない）」「五角形に仕切り線２本（交わる）」「六角形に仕切り線３本（交わる）」の4つで取り組ませる。

図3は、三角形に仕切り線を1本、四角形に仕切り線を２本入れて、点・辺・面の数を数えて記入したものである。図形の頂点を「点」として数えるだけでなく、図形の辺と仕切り線との交点も「点」として数える。そして、点と点を結ぶ線分をすべて「辺」として数えるところに注意が必要である。



T	H	M	T	H	M
5	6	2	8	10	3

図3　「仕切り線」を入れた多角形

この時点で生徒は、３次元の図形「多面体」で使った方法を思い出すであろう。「小さい2つの数を足して、一番大きい数と比べる」という方法である。そして、M＋T－H＝1あるいはM＋T＝H＋1という関係式を見つける。

(2)　図形の構成要素を次元の順に並べる

今度は授業者が指示を出さなくても、生徒は構成要素を次元の順に並べ替え、T－H＋M＝1と式変形するであろう。

この段階では、「次元の順に整理する」という手立てが習慣付いているはずである。

4　3次元のオイラーの多面体定理の修正

(1)　２次元の図形「多角形」と３次元の図形「多面体」の場合を比べる

２次元の図形の性質と３次元の図形の性質を比べる場面である。この場面で大切な手立ては、「比較しやすいように学習プリントを工夫する」である。意図的に、３次元の図形「多面体」で行ったことと、２次元の図形「多角形」で行ったことを比較しやすいように左右に並べておく。

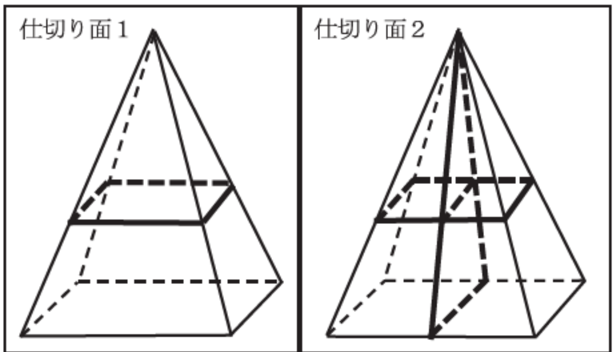
授業者が「２次元の図形『多角形』と３次元の図形『多面体』の場合を比較しよう」と投げかけると、多くの生徒は「次はT－H＋M＝3かな？」と予測するであろう。ここでいう「次は」とは「４次元」のことを指す。その雰囲気の中で、学習プリントの左右を見比べて「多角形には『仕切り』を入れたが、多面体には『仕切り』を入れていない」と気付く生徒が出てくるはずである。

(2)　「仕切り面」を入れて、３次元のオイラーの多面体定理を修正する

この場面で大切な手立ては「２次元の図形と３次元の図形で同様のことを行わせる」である。２次元の図形「多角形」で行ったように、３次元の図形「多面体」でも「仕切り」を入れることで、オイラーの多面体定理を修正できるのである。

２次元の図形「多角形」では「仕切り線」であったが、３次元の図形「多面体」では次元が1つ上がって「仕切り面」になる。

図4は、四角錐に「仕切り面」1面を入れた図、四角錐に「仕切り面」２面を交差するように入れた図と、点・辺・面の数を数えて記入したものである。



T	H	M		T	H	M	
9	16	10		13	26	18	

図4　「仕切り面」を入れた多面体

数が大きくなり、数え忘れが出やすいので、授業では一つ一つ確認しながら数を記入していった方がよい。特に注意が必要なのが、図４の右側「仕切り面２」の場合で、縦の仕切り面上下2面を数え忘れて「16」としやすい。

「仕切り面」がないときには、T－H＋M＝２であったのに、「仕切り面」を入れると次のようになる。

仕切り面を1面入れると、T－H＋M＝3

仕切り面を2面入れると、T－H＋M＝5

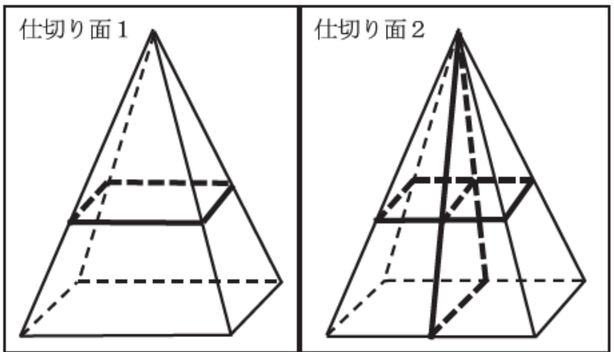
授業者が「どういうこと、オイラーの多面体定理がくずれた」と投げかけると、数名の生徒が「仕切り面が1面の場合は…、仕切り面が2面の場合は…」と場合分けしようとするであろう。それに対して授業者は、「２次元の図形『多角形』のとき、場合分けした？」と問いかける。

考え込む生徒へのヒントとして、図４のMの欄の右横に

空欄を設けている。また、「次元が1つ上がったのに、関係式の長さが同じでよいのだろうか？」というヒントも準備している。しかし、3次元の構成要素「胞」を付け足すのは生徒にとって負担が大きすぎるので、授業者が紹介してもよいと考える。

「胞」の定義は、面で囲まれた「空間の部分」であるが、「３次元の小部屋」と言った方が生徒にとって分かりやすい。

図５は、胞の数Hoを記入したものである。



T	H	M	Ho	T	H	M	Ho
９	１６	１０	**2**	１３	２６	１８	**4**

図５　「仕切り面」を入れた多面体

生徒は、先ほど計算したT－H＋Mの結果とHoを比較して、T－H＋M－Ho＝1を見つけるであろう。

例えば、仕切り面が1面の場合は、T－H＋M＝3の「３」と、Hoの「２」を比べて、「差が１」と考えて、左辺に－Hoを付け足し、右辺を1とするのである。

５　1時間目の授業の全体像

ここまでが1時間目の授業である。本稿の最後の図6が1時間目の学習プリントである。

斜体の文章や式は、予想される生徒の反応である。また、極太線で表した「仕切り線」や「仕切り面」は、授業者の説明を聞いて、生徒がかき込むものである。

３次元の図形「多面体」で行ったことと、２次元の図形「多角形」で行ったことを比較しやすいように左右に並べている。また、その下の部分には、四角錐の見取図2つと、表の中にT・H・Mだけを印刷している。その右横にヒントとして空欄を設けている。後にHoを記入するための空欄である。図６を見れば、1時間目の授業の全体像と流れが分かる。

６　４次元・５次元のオイラーの図形定理の予測

(1)　４次元・５次元の図形のイメージをつかむ

ここからが2時間目の授業である。いよいよ、４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測するのであるが、その前に「規則をもとに４次元・５次元の図形をイメージさせる」という手立てが大切になる。

「４次元の図形は、図にかくこともできないし、模型をつくることもできない。でも、多胞体という名前で、胞で囲まれているらしい。そんな不思議な図形の点・辺・面…の数の関係式が予測できるなんて…」という気にさせたいのである。

表1は、各次元の図形とその特徴である。

表1　各次元の図形とその特徴

次元	図　　形	図 形 の 特 徴
０次元	点	
１次元	線分　（多点体）	点で囲まれた図形
２次元	多角形（多辺体）	辺で囲まれた図形
３次元	多面体	面で囲まれた図形
４次元	多胞体	胞で囲まれた図形
	（胞は、面で囲まれた「３次元の小部屋」）	
５次元	多？体	？で囲まれた図形
	（？は、胞で囲まれた「４次元の小部屋」）	

図形の名称の付け方からすると、２次元の図形「多角形」は「多辺体」、1次元の図形「線分」は「多点体」とした方が規則的であると考え、括弧書きで付け加えている。

規則をもとに４次元の図形は「胞（３次元の小部屋）で囲まれた多胞体」、５次元の図形は「？（４次元の小部屋）で囲まれた多?体」というようにイメージできるのである。

(2)　一度次元を下げてデータを増やす

４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測するには、「一度次元を下げてデータを増やす」という手立てが大切である。

０～３次元のオイラーの図形定理は、表2のようになる。

表２　０～３次元のオイラーの図形定理

次元	図　　形	オイラーの図形定理
０次元	点	T＝1
１次元	線分　（多点体）	T－H＝1
２次元	多角形（多辺体）	T－H＋M＝1
３次元	多面体	T－H＋M－Ho＝1
	(Ho は、面で囲まれた「３次元の小部屋」の数)	

表２を見ると、次元が上がるたびに、関係式がだんだん長くなっていくようすが分かる。

(3)　４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測する

表２をもとにして、４次元・５次元のオイラーの図形定理

を予測し、次元ごとに整理すると、表３のようになる。

表３　各次元のオイラーの図形定理

次元	図　形	オイラーの図形定理
０次元	点	T＝１
１次元	線分　(多点体)	T－H＝１
２次元	多角形(多辺体)	T－H＋M＝１
３次元	多面体	T－H＋M－Ho＝１
	(Ho は、面で囲まれた「３次元の小部屋」の数)	
４次元	多胞体	T－H＋M－Ho＋？＝１
	（？は、胞で囲まれた「４次元の小部屋」の数)	
５次元	多？体	T－H＋M－Ho＋？－??＝１
	(??は、？で囲まれた「５次元の小部屋」の数)	

関係式は、図形の構成要素を次元の順に並べているので、＋と－が交互に出てきて、次元が1つ上がるたびに左辺の項が1つずつ増えている。そして、右辺はどの次元でも1である。

もともとは0次元の「Ｔ＝１」であるので、右辺の1は各次元の図形の「ひとかたまり」を表しているといえよう。

なお、紙面の関係で、表３の証明は、次回にゆずりたい。

７　おわりに

これまで中学２年の授業「次元を超える－図形の点・辺・面…の数－」(２時間計画)の授業づくりをもとに、授業の流れと手だてを述べてきた。

授業の流れは、「３次元のオイラーの多面体定理を見つける」→「『仕切り線』を入れて２次元のオイラーの多角形定理を見つける」→「『仕切り面』を入れて考察し、３次元のオイラーの多面体定理を修正する」→「４次元・５次元のオイラーの図形定理を予測する」である。

そして手立ては、「次元の順に整理する」「比較しやすいように学習プリントを工夫する」の２つをベースに「２次元の図形と３次元の図形で同様のことを行わせる」→「規則をもとに４次元・５次元の図形をイメージさせる」→「一度次元を下げてデータを増やす」である。

内田・田中が行ってきた研究[3)]では、「次元の順に整理する」「比較しやすいように学習プリントを工夫する」の２つをベースに「規則をもとに４次元の図形をイメージさせる」→「一度次元を下げてデータを増やす」→「図形の成り立ちを整理する」という手立てを明らかにした。今回の研究でさらに「２次元の図形と３次元の図形で同様のことを行わせる」という手立てが明らかになった。

平成30年告示高等学校学習指導要領解説数学編理数編[4)]の数学Ⅰ〔課題学習〕に「四平方の定理」の例示がある。２次元のピタゴラスの定理を３次元へ発展させるものである。中学校段階から次元を超える授業を指導計画へ位置づけ、段階を追って高等学校数学へつなげていくことが大切だと考える。

参考文献

１）文部科学省：中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編　平成29年7月
２）田中俊光：山口大学教育学部附属山口中学校研究紀要第45号(2001年)
３）内田陽三・田中俊光：山陽小野田市立山口東京理科大学紀要第７号(2024年)
４）文部科学省：高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編 理数編 平成30年７月

中学２年　数学プリント（図形の点・辺・面…の数）　　２年　　組　　番

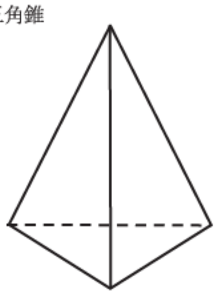
〈課題「図形の点・辺・面…の数」〉

図形の点・辺・面…の数に成り立つ関係を見つけよう。　**点の数（Ｔ），辺の数（Ｈ），面の数（Ｍ）**

【３次元の図形「多面体」】

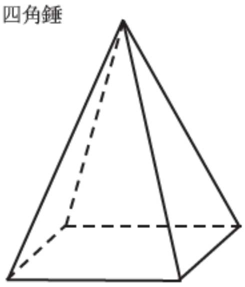
1　点の数（Ｔ），辺の数（Ｈ），面の数（Ｍ）を求めよう。

三角錐



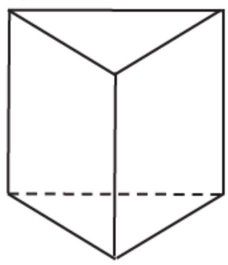
Ｔ	Ｈ	Ｍ
4	*6*	*4*

四角錘



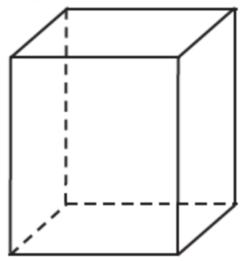
Ｔ	Ｈ	Ｍ
5	*8*	*5*

三角柱



Ｔ	Ｈ	Ｍ
6	*9*	*5*

四角柱



Ｔ	Ｈ	Ｍ
8	*1 2*	*6*

2　Ｔ・Ｈ・Ｍに成り立つ関係を見つけよう。

〈気付いたこと〉

M＋T＝H＋2　　M＋T−H＝2

次元の順に並べ替えると　T−H+M＝2

〈Ｔ・Ｈ・Ｍに成り立つ関係〉３次元の図形「多面体」

~~$T-H+M=2$~~　$\boldsymbol{T-H+M-Ho=1}$

【２次元の図形「多角形」】

1　点の数（Ｔ），辺の数（Ｈ），面の数（Ｍ）を求めよう。

三角形

	Ｔ	Ｈ	Ｍ
	3	*3*	*1*
仕切り線	*5*	*6*	*2*

四角形

	Ｔ	Ｈ	Ｍ
	4	*4*	*1*
仕切り線	*8*	*10*	*3*

五角形

	Ｔ	Ｈ	Ｍ
	5	5	1
仕切り線	*10*	*13*	*4*

六角形

	Ｔ	Ｈ	Ｍ
	6	*6*	*1*
仕切り線	*12*	*17*	*6*

2　Ｔ・Ｈ・Ｍに成り立つ関係を見つけよう。

〈気付いたこと〉*図形が単純なので　T＝H　M＝1*

仕切り線を入れると　M＋T＝H＋1　　M＋T−H＝1

次元の順に並べ替えると　T−H+M＝1

〈Ｔ・Ｈ・Ｍに成り立つ関係〉２次元の図形「多角形」

T−H+M＝1

3　２次元の図形「多角形」と３次元の図形「多面体」の場合を比較しよう。

次は，T−H+M＝3　？

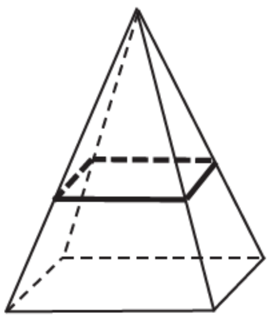
２次元の図形「多角形」では仕切りを入れたのに，３次元の図形「多面体」では仕切りを入れていない。

仕切り面を１面入れると，T−H+M＝3

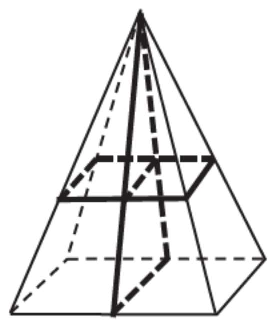
仕切り面を２面入れると，T−H+M＝5

※面で囲まれた３次元の小部屋を「胞（ほう）」と呼ぶ。

胞（ほう）の数（Ho）を考えればよい。



	Ｔ	Ｈ	Ｍ	*Ho*
仕切り面１	*9*	*16*	*10*	*2*



	Ｔ	Ｈ	Ｍ	*Ho*
仕切り面２	*13*	*26*	*18*	*4*

図６　１時間目の学習プリント