

[研究ノート]

時間の物理学

吉村 高男

山陽小野田市立山口東京理科大学 共通教育センター

Physics of Time

Takao YOSHIMURA

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

要 約

私達は「時の流れ」の中で生活しており、「時間という自由度」の存在と、命あるものは必ず死に、世代は交代していくという、過去と未来に対する時間の非対称性を示す「時間の矢」を認識している。物理学を構成する基本的な方程式は、ほとんどが時間反転に対して対称な微分方程式で、「時間の矢」を示すことはできない。Ilya Prigogine は現実の世界の本質的な現象を反映した「散逸構造」の理論をつくり、エネルギーが散逸する系の中で自己組織化が進むという、時間の不可逆性について示した。それは定常開放系、非平衡開放系の中の現象で、運動方程式は非線形微分方程式で示される。時間の起源については、宇宙の始まりに限りなく迫っていく必要がある。私達の宇宙は点状の極微の世界から、インフレーション、ビッグバンで始まったと考えられており、宇宙の創生期のダイナミクスを議論するためには量子力学を考慮した量子宇宙論を構成する必要がある。それには様々な切り口からの理論が存在するが、インフレーション、ビッグバンを必然的に導出することに現在の時点ではそれらは成功していない。4次元の時空間が創発される必然性もそのダイナミクスで示す必要があるが、量子論的宇宙が古典的な相対論的宇宙に接続・創発されていくメカニズムを明確にすることが肝要である。多くの未解決の難問が山積しているが、現状を概観して、時空次元をダイナミカルに捉える試行についても本稿で言及したいと考えている。

Key words : Arrow of time, Dissipative structure, Quantum fluctuation, Inflation,
Dimension theory of space-time

キーワード : 時間の矢、散逸構造、量子揺らぎ、インフレーション、時空次元論

I. はじめに

私達は生きていく中で、時間という概念を必然的に持っており、脳裏に去来することを時間軸にそって書き下ろすことは優れた整理法であり、それは人類の知恵とすることができる。物理学は時空間の座標の中で事象・現象を素朴に捉え、厳密に数学的表現を実行していく中で、戻れない過去から未来への流れの中に現在があるというこの世の因果世界を認識してきた。

Newton 力学では原因・結果の区別がなく時間軸には方向性がない。その運動方程式は時間反転について可逆で不変である。量子力学の基本方程式も時間反転に対して可逆で不変であり、事象の連結の程度を確率で与える。確率は古典力学では 1 または 0 であるが、量子力学では 1 と 0 の間の値をとる。2 つの状態が CP 対称（粒子反粒子変換・鏡像変換対称）なら原因・結果の区別はなく（T 対称：時間反転対称）、力学の可逆性が成立する。

一方、マクロ世界で私達が日常的に感じている統計力学、熱力学的な不可逆性（エントロピー増大則など）については、その統計力学的に考える粒子数と、原子・ミクロ世界で考える素過程の可逆性における粒子数が圧倒的に異なるという情報量の相違によって認識された。このように、素朴実在論的にも、物理学には実在の法則と人間という認識主体の存在を介する情報科学の法則が混在することになったと言える。

Einstein の特殊相対性理論では、Newton による「絶対時間・絶対空間」概念が放棄され、電磁気学の Maxwell 方程式を自然に満足するように、時間と空間が相互に混ざり合う座標系を導入することにより、慣性系における「時間・空間の相対化」が行われた。さらに、非慣性系まで含む、より一般的な座標変換（一般座標変換）まで拡張したのが一般相対性理論である。一般相対性理論における時間概念は特殊相対性理論とは違った様相を呈し、強い重力場における時計の進み方が弱い重力場におけるそれと比べて時にゆっくり進み、光が重力的赤方変移を示すという特徴がある。さらに、時空の歪みは物質の存在と不二一体性があり、時空は物質と切り離すことのできないダイナミカルな存在として捉えることができるようになった。

現在の宇宙は膨張しており、時間を逆に遡っていくと約 138 億年前の点状から始まった宇宙のインフレーション、ビッグバンに辿り着く。まさに、時間の始まりである。それ以来、「宇宙論的時間の矢」は流れ続

けている。本稿では、物理学を構成している様々な理論体系の中に存在する時間概念の中で、特に「時間の矢」に注目して、その起源に迫っていきたいと考えている。

II. 「時間の矢」について

最初に「熱力学的時間の矢」について述べる。熱として散逸したエネルギーを自然にもとに戻すことはできない。散逸したエネルギーは質が悪くなっており、エントロピーが高くなっている状態として物理学的には表現する。質の悪い高エントロピーのエネルギーを、手を加えずに質を高めることはできない。これが「孤立系（外部の影響が無視できる系）のエントロピーは時間とともに増大する」という熱力学第二法則の内容である。エントロピー最大の状態が熱平衡状態であり、孤立系は熱平衡状態に向かって、不可逆的に進んでいくとも言える。このように、エントロピー増大則から出てくる時間の向きが「熱力学的時間の矢」である。

Prigogine は、現実の世界の本質的な現象を反映した「散逸構造」の理論をつくり、エネルギーが散逸する系の中で自己組織化が進むという、時間の不可逆性について示した¹⁾。それは定常開放系、非平衡開放系の中での現象で、運動方程式は非線形微分方程式で示される。簡単な生物種から複雑な生物種に進化する生物学的時間、新しい事象が生起して同じ事象が繰り返さない歴史的な時間、音符の時系列的配置により豊かな感性を表現する音楽的時間など、時間は最も身近なものであると同時に不思議な存在で、物理化学者の Prigogine は物理化学の基礎過程から時間を理解しようとした。よって、より一般的な複雑性解析の手段としては自ずと限界がある。

物理的諸現象の素過程を記述する Newton 力学や量子力学等の基本的な運動方程式は、時間反転に対して可逆になっているが、Avogadro 数を対象とするような多体系の統計力学では、確率的に元の状態に戻るのに宇宙的時間を遙かに超える多大な時間がかかるため、「統計力学的な時間の矢」が生じると考えられている。

ところで、最近（2017 年）、東京大学の Iyoda, Kaneko, Sagawa のグループが多体系の量子力学に基づいて熱力学の第二法則「エントロピー増大則」を理論的に導出することに成功したということで話題になっている²⁾。この理論の鍵になることは 2 つである。量子多体系の相互作用の局所性と、ほとんどすべての

量子多体系のエネルギー固有状態が熱平衡状態を示すという「固有状態熱化仮説」(ETH: Eigenstate Thermalization Hypothesis)である。これらをもとに、熱浴の遠方の影響が考えている系に届く時間に比べて十分短い時間領域においては、その系にとって熱浴はカノニカル分布(正準分布)と見なすことができ、熱力学の第二法則や揺らぎの定理が成立することを数学的に示したものである。

次に、「宇宙論的時間の矢」について述べる。よく知られているように、この宇宙は、今から約 138 億年前にインフレーション、ビッグバンで始まったと考えられている。それ以来、この宇宙は膨張を続けており、数十億年前からは加速膨張に転じていることが明らかになっている。この膨張のメカニズムは未解明であるが、素粒子よりもさらに極微な量子論的スケールから始まっており、インフレーションを起こしたインフラトン場の量子揺らぎが、宇宙におけるエネルギー密度の分布に繋がり、私達が現在見ることができる多様な姿を呈する宇宙構造をつくる種になったものと最近では考えられている。宇宙の膨張を通して、局所的には星の生成等で熱が発生するが、宇宙背景全体は冷えることにより、宇宙空間に熱が放たれることでエントロピーが減少して、地球など惑星において生命の発生・進化が起こるなど、様々な物質の階層が創発されてきたと考えられる。まさに、宇宙膨張という時間の不可逆性、即ち「宇宙論的時間の矢」が熱平衡からのずれを絶え間なくつくり、私達生命体の存在を支えているということが出来る。

最近の様々な宇宙観測と理論研究の進展を通して、人類は時間の起源にかなり迫ってはいるが、それは無限級数を追う感じで、残念ながら時間の本質については未解明である。さらに、今後、この宇宙がどうなるのかという宇宙の終焉問題についても、このまま加速膨張を続けるのか、収縮に転ずるのか等について、今日までの宇宙観測データからでは何も言えない状況である。

その他、「時間の矢」に関する話題としては、連星系やブラックホール同士などの合体による重力波放出や、加速度運動をする荷電粒子からの電磁波放出など、波動方程式の解として遅延解が効いてくる「波動論的時間の矢」や、次章で述べる「微視的時間の矢：バリオン数生成の謎」などがある。

Ⅲ. CPT 定理と CP 対称性の破れ

物理法則が、ある変換を施すことにより不変性が保たれているとき、その変換に対して対称性があると言う。不変性が保たれない場合に、対称性が破れていると言う。相対論的場の量子論における Lorentz 対称性を保証する CPT 定理とは、次の 3 つの変換を同時に行う変換による不変性を示す。

C: 粒子・反粒子反転対称性 (Charge conjugation)

P: 鏡像反転対称性 (Parity)

T: 時間反転対称性 (Time reversal)

素粒子物理学の基本言語である相対論的場の理論では CPT 対称性は決して破れることはない。鏡像反転 (P) と時間反転 (T) を場の量子論を使って続けて行うと Lorentz 変換になり、粒子と反粒子が入れ替わる。よって、PT の組み合わせは C になり、C は 2 回続けて行うと元に戻るため、 $CPT = C^2 = 1$ となることで CPT 対称性が保証されることが分かる。

素粒子の弱い相互作用で起こる K 中間子の崩壊過程では CP 対称性が破れていることが 1964 年に実験的に確認された。CPT 定理を使うと T 対称性も破れていることになる。2008 年にノーベル物理学賞に輝いた、クォークが 3 世代以上あれば、CP 対称性の破れが起こることを理論的に示した「小林・益川理論」³⁾ は、B 中間子の崩壊過程を日米の実験グループが調べることで正しいことが確認された。

ところで、現在の素粒子物理学では、この宇宙で生成される粒子(正粒子)と反粒子の個数が同数でなければならない。しかし、私達の体をはじめ、天体を形成しているものは物質(粒子)である。標準模型や超弦理論では、反物質(反粒子)が消え、物質が生き残るメカニズムについて満足のいく解答はない。このことは、レプトン数生成、バリオン数生成の問題として捉えられており、様々な議論があるが、いずれも生成のオーダーが不足しており、現在未解決である。

バリオン数生成の宇宙論的観測⁴⁾については、バリオン数密度 n_B と光子数密度 n_γ との比 η は次のように確認されている。

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.14 \pm 0.25) \times 10^{-10}$$

即ち、この宇宙では正・反物質の内、 10^{-10} オーダーで物質が生き残り、現在見られる宇宙構造が形成されたと考えられる。よく知られているように、

ロシアの Sakharov はこのような宇宙が形成される 3 条件を次のように示した⁵⁾。

- (1) バリオン数非保存 (バリオン数生成)
- (2) C 及び CP 対称性の破れ
 - ：この破れがないと、バリオン数の変化 $\Delta B \neq 0$ の過程と逆過程が同じ頻度で起こる。
- (3) 宇宙初期の熱平衡からのずれ
 - ：宇宙のバリオン数の時間発展を考えた場合、熱平衡からのずれがないと、バリオン数の密度 n_B が結局 0 になる。

これらは現在の宇宙現象を説明するために必要な条件を手で入れているわけである。自発的に対称性を破るメカニズムも含めて、この宇宙における「時間の矢」の起源について、合理的に説明できる理論をつくるのが、今後の課題である。

IV. 超弦理論、時空次元論について

素粒子を弦 (string) とみる理論は、もともと強い相互作用をするハドロンの共鳴状態を示すスペクトル (Regge 軌跡) や振幅の交差対称性 (Veneziano 振幅) といった、ハドロン物理学の強い相互作用におけるダイナミクスを記述するために、1960 年代に考案されたものである。高エネルギーに励起された素粒子 (メソン等) は弦 (string) のようなもので結ばれた束縛状態と見なすことができる。

しかしながら、場の量子論における発散の困難さを克服するために導入された素粒子の超弦理論は、その量子化が 10 次元や 26 次元といった高次元でのみうまくいくということから、それは単純にはハドロン物理学を記述する理論には繋がってこなかったが、超弦の基底状態として自然にスピン 2 のゼロ質量場 (重力場) を含むことから、強い力、弱い力、電磁気力の 3 つの力を統一した標準模型 (ゲージ理論) を超えて、重力をも含む最終的な統一理論になるのではないかと期待されている。

ところで、1995 年に Polchinski が D- プレーンを発見⁶⁾ して以来、この状況が大きく変化する。D- プレーンは 10 次元時空の中で、様々な次元を持つものが存在でき、超弦理論におけるソリトンのようなものと解釈されている。D- プレーンの上では 4 次元時空のゲージ理論 (重力以外の 3 つの力を統一する理論) が構成でき、それは質量や電荷 (charge) をもっており、重

力を通して背景の時空に影響を与える。この重力とゲージ理論の関係を利用することにより、ゲージ理論の強結合領域について重力を使って調べることが可能⁷⁾ になり、最近では再びハドロン物理学の解析に超弦理論は用いられるようになってきた。

一方、時間については、超弦理論では、空間と同じように時間が現れたり消えたりする例はなく、宇宙開闢以来、過去から未来に流れる 1 次元の時間軸を与えて様々な議論を行っている。熱力学的な時間概念については、エントロピーは増大する方向が自然に起こる方向なので、超高エネルギー状態で始まった宇宙開闢時に、宇宙のエントロピーは最も低い状態であったとしなければ、「宇宙論的時間の矢」の方向を説明することができない。このことは宇宙が膨張していることとも密接な関係がある。時間とは何かという問いは現在の時点では答えることができない難問である。

超弦理論で議論する長さのスケールは、この宇宙で考えられる最小スケールである Planck 長 (約 10^{-35}m) 程度と考えられている。よって、時間スケールについては、この Planck 長を光速で割った Planck 時間 (約 10^{-44} 秒) が考えられている。弦の相互作用については、弦を構成する点と点の間の関係性の時間変化と捉えることができる。相互作用に伴って、弦の長さや弦の本数が増え、位置移動や弦の振動パターンが変化する。これらは、弦を構成する無数の点座標の時間変化と捉えることができる。

さて、ここでは時空次元について、もう少しダイナミカルな視点から議論をする⁸⁾¹¹⁾。

即ち、時空次元について、連続次元まで拡張してダイナミカルに捉えるということである。現在の宇宙は限りなく時空 4 (=1+3) 次元に近づいているが、空間次元を $3 + \varepsilon$ 次元として、時間次元を $1 - \varepsilon^*$ として捉える。宇宙開闢時には $\varepsilon \rightarrow \infty$ であり、その時 $\varepsilon^* \rightarrow 1$ となり、時間次元は存在しない。最初の次元変化は激しく、インフレーション、ビッグバンを通して速やかに $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon^* \rightarrow 0$ となる。時空 4 次元の誕生である。そのような ε と ε^* の関係を表す Toy Model^{10),11)} を次に示す。

$$e^* = \frac{1+a}{a+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (1)$$

ここで、 a は任意の定数である。 $a=1$ とすると、

$$e^* = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (2)$$

となる。

私達は、日常的な時空間の広がりやを 4 次元時空として捉えているので、空間次元の $3 + \varepsilon$ 次元と、時間次元の $1 - \varepsilon^*$ 次元の和となる時空次元数 D を次に示す。

$$D = (3 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon^*) \\ = 4 + (\varepsilon - \varepsilon^*) \quad (3)$$

空間次元数 3 からのずれ ε と時空次元数 D との関係をグラフで表す (図 1)。

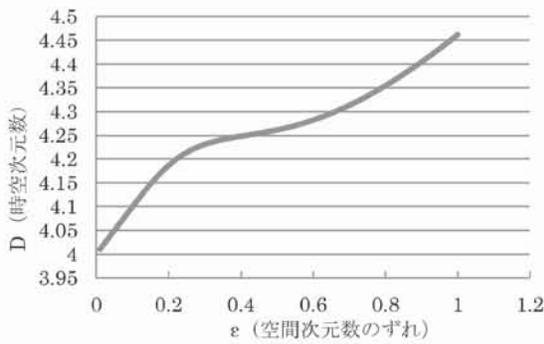


図 1 ε と D の関係を示すグラフ

万有引力と空間の次元数との絡みについて議論する場合、太陽・惑星系の近日点移動について考えると面白い。良く知られているように、水星の近日点移動は 100 年で 574 秒であるが、他の惑星の効果等を考慮に入れ、Newton 力学を用いて解くと、理論的に 43 秒少ない 531 秒となる。この 43 秒のずれを、時空間の歪みを考慮に入れて、理論的に導出したのが Einstein による一般相対性理論である。

ここでは、その効果を一般相対性理論に頼らずに、万有引力の逆 2 乗法則の微妙なずれによるものと考え、その由来を空間の次元数のずれと読み直して計算を試みる。

太陽(質量 M)を中心として、その周りを回る惑星(質量 m)の運動について、空間次元数が $3 + \varepsilon$ として微妙にずれており、ポテンシャルが $1/r^{1+\varepsilon}$ に比例した運動をしていると考える。Newton 力学を使った 2 体問題で解く。運動方程式は、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2u^2} \left(-\frac{G_\varepsilon Mm}{r^{2+\varepsilon}}\right) \quad (4)$$

となる。 u は動径方向の距離 r の逆数であり、 h は面積速度の大きさである。空間次元数が $3 + \varepsilon$ とずれたので、物理量の次元が全体で合うように調整した万有

引力定数を G_ε としている。この方程式を解くために、

$$r = \frac{L}{1 + e \cos \gamma \theta} \quad (5)$$

とする。ただし、

$$u = \frac{1}{r} \quad (6)$$

$$L = \frac{h^2}{G_\varepsilon M} \quad (7)$$

である。 e は離心率である。 $0 < e < 1$ で閉じた楕円軌道となる。 $e=0$ の時は、円軌道である。 γ と ε の関係を求めると次のようになる。

$$\gamma = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

一方、一般相対性理論においては、水星の近日点移動を求めるために、質点の測地線を与える方程式

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (9)$$

から導かれる次の方程式を使う。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{kM}{\alpha^2} + \frac{3kM}{c^2} u^2 \quad (10)$$

ここで、 α と k については、

$$\alpha = m M h \quad (11)$$

$$k = G m M \quad (12)$$

である。この方程式を解くために、同様に (5) 式を用いる。ただし、 $\varepsilon \approx 0$ であるため、万有引力定数は本来の G で計算をする。適切に近似計算を実行し、 γ は次のようになる。

$$\gamma = 1 - \frac{3G^2 M^2}{c^2 h^2} \quad (13)$$

ただし、 c は光速である。この γ により、近日点の移動が生じる。

しかしながら、近日点の移動が生じる原因を一般相対性理論の効果に頼らずに、万有引力の逆 2 乗法則の微妙なずれによるものと考え、その由来を空間の次元数のずれと読み直す。つまり、次元数をダイナミカル

な変数と考え、連続化を図るわけである。

(13) 式の γ に関する右辺の第二項は、(8) 式で求めた γ に関する第二項と同じであるため、次元数のずれ ε は、

$$\varepsilon = \frac{6GM^2}{c^2 h^2} \quad (14)$$

となる。このような空間の次元数のずれ ε が水星の軌道周辺にあるとすれば、この値は、

$$\varepsilon \approx 6.41 \times 10^{-7} \quad (15)$$

となる。わずかな次元数のずれを考えることにより、水星の近日点移動の現象が矛盾なく説明できる。

その際、この次元数が 3 より大きい方にずれるか、小さい方にずれるかが、興味ある問題になる。実際の観測値は近日点の角度のずれが惑星の進む向きである。下図に、模式的に示したシミュレーションで明らかかなように、太陽周辺における次元数は 3 より大きくなるとすると、この現象が合理的に説明できる (図 2)。

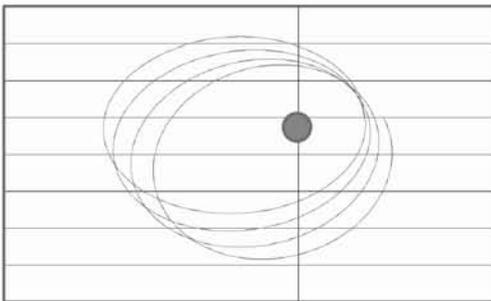


図 2 空間の次元数 $d > 3$ の時の近日点移動
～太陽を周回する水星軌道の模式的な表現～

ところで、時空間の次元数が連続的に変化する本質的な場面は、宇宙開闢時の超高エネルギー状態や、ブラックホールと言った物質の超高密度状態における極限状態においてである。そこでは、まさに、質量や重力という最も基本的な物理量が創成され、議論される場面である。Euclid 幾何学のもとで物理学を展開したのが Newton 力学であり、非 Euclid 幾何学 (Riemann 幾何学) を物理学に適用したのが Einstein による一般相対性理論である。そこでは時空間の歪みを重力として捉えたわけである。超弦理論では、Maldacena の理論⁷⁾ により、重力をホログラフィー化して、一見幻のように捉えることが可能になった。もともと、一般相対性理論は、等価原理により一様な重

力場においては、適当な加速度運動をする座標系を基準にすることで、すべての物理現象に対する重力の作用を消すことができるということから出発していることも重要な点である。

さらに、重力、質量といった概念は物理学の根幹に係わる概念である。素朴に宇宙の創成を考える際に、はじめから時空の整数次元ありきでは宇宙の器が堅すぎ、宇宙が始まらない。宇宙の始まりを柔らかく捉えるために、時空次元数をダイナミカルな変数としたい。そこで、時空次元数を連続化することにより、4 次元時空からのずれ、特に、空間次元数 3 からのずれ ε が重力、質量を担っていると考える。素粒子の質量スペクトルに対応した次元スペクトルも存在しているはずである。即ち、究極的には、超弦 (Super String) が空間次元数 3 からのずれ ε で成り立っていると考えるわけである。次元のずれ ε の絶妙な絡み合いの規則性が素粒子の質量スペクトルに反映しているという発想である。このことは、レプトン数生成、バリオン数生成についても、当然のこととして理解することができる。即ち、宇宙開闢時に、多くの正・反粒子は発生したが、Sakharov の 3 条件のもとで、正粒子が生き残ったとは考えずに、3 次元空間に次元降下 (時間は 1 次元に次元上昇) する際に、次元のずれ ε の安定な次元スペクトルに対応した素粒子が形成され、それらが現在の宇宙を形成していると考えられる。このまま宇宙膨張が続くと、次元数が 4 次元の時空間に完璧なまでに限りなく近づいていくため、安定な素粒子もやがて崩壊する運命にあることになる。このような物理学を、筆者は「時空次元論」と呼んでいるが、そこにおける幾何学は Neumann によって考案された「連続幾何学 (continuous Geometry)」¹²⁾ が有効になると考えている。

このように考えてくると、整数次元数からのずれが、低エネルギー極限においては、一般相対性理論における時空間の歪みと等価として捉えることも一つの可能性として興味深い。

いずれにせよ、宇宙が始まる開闢時やブラックホールのような極限的な物質状態を本格的に議論するためには、どうしてもダイナミカルな次元数の変化を考えざるを得ないと筆者は考えている。次元数を連続化することによって、4 次元時空で成立している様々な対称性や保存則も、当然そのような極限状態では破れる。それらが破れているところから始まるが故に、138 億年前に私達のこの宇宙が創成されたとも言える。対称性が破れているところから対称性が生まれる。現在、

正当な理論として議論されている「自発的対称性の破れ」に対する逆転の発想とも捉えられる。

V. おわりに

時間の議論を展開するには、究極的には、どうしても空間や物質概念を切り離しては考えることはできない。そこでは、本稿で議論してきたように「次元」の概念がキーワードとして、本質的に係わってくるように思える。

時間の起源についても、Hawking が指摘したように、量子論的宇宙の創成時に「虚時間」を導入すること¹³⁾で、Vilenkin が考えた「無からの宇宙創成」¹⁴⁾に自然に繋げることができるが、「虚時間」という数学概念を物理的にどのように解釈するかは難しいところである。Steinhart と Turok が提案した「Brane 宇宙モデル」に基づいた Brane (膜：私達の宇宙もそのひとつ) どうしの衝突によりビッグバン (宇宙の始まり) が生じるという「エキピロティック宇宙モデル」¹⁵⁾では Brane の衝突が繰り返されるため、振動宇宙になり、時間の始まりも終わりもないことになる。

いずれにせよ、現在の段階において、時間の謎は本質的には解けていないといえることができる。

【参考文献】

- 1) I. Prigogine; From Being to Becoming, Freeman, San Francisco, 1984
- 2) E. Iyoda, K. Kaneko, T. Sagawa; Fluctuation Theorem for Many-Body Pure Quantum States, arXiv: 1603. 07857v3, 2017
- 3) M. Kobayashi, T. Maskawa; CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction, Prog. Theor. Phys. 49, No2, 652, Feb. 1973
- 4) D. N. Spergel et al.; First Year WMAP Observations and Determination of Cosmological Parameters, arXiv:astro-ph / 0302209v3, 17 Jun. 2003
- 5) A. D. Sakharov ; Vestnik AN SSSR, 4, 39, 1989
- 6) J. Polchinski ; Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges, Phys. Rev. Lett. 75, 4724, 1995
- 7) J. M. Maldacena ; The Large N Limit of Superconformal Theories and Supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231, 1998, hep-th / 9711200
- 8) 吉村高男；時空次元論序説，山口福祉文化大学研究紀要 6, 99-107, 2012
- 9) 吉村高男；時空次元と物理学の構成，日本物理学会中国・四国支部学術講演会講演予稿集，148, 2013
- 10) 吉村高男；時空次元数の連続化について，山口福祉文化大学研究紀要 8, 61-70, 2014
- 11) 吉村高男；次元について，至誠館大学研究紀要 1, 49-61, 2015
- 12) John von Neumann; Continuous Geometry, Princeton University Press, 1960
- 13) J. B. Hartle, S. W. Hawking; Wave Function of the Universe, Phy. Rev. D28, 2960, 1983
- 14) A.Vilenkin: Creation of Universe from Nothing, Phys. Lett. 133B, 177, 1983
- 15) P. Steinhard, N. Turok; Cosmic Evolution in a Cyclic Universe, Phys. Rev. D65, 126003, 2002